

**Напишите функцию Лагранжа для замкнутой системы из  $N$  взаимодействующих материальных точек и выведите закон сохранения энергии из гипотезы однородности времени.**

Рассмотрим систему взаимодействующих материальных точек. Если точки системы взаимодействуют только друг с другом (на систему не действуют внешние силы), система является замкнутой.

Механическая система характеризуется обобщёнными координатами  $q$  и обобщёнными скоростями  $\dot{q}$ . Механической системе ставится в соответствие функция Лагранжа — лагранжиан, зависящая от обобщённых координат и скоростей, и, возможно, непосредственно от времени —  $L(q, \dot{q}, t)$ .

Выражение для функции Лагранжа для замкнутой системы:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - U_B(r_1, \dots, r_N),$$

где первое слагаемое — кинетическая энергия, а второе слагаемое — потенциальная.

Система уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени. Тогда полная производная функции Лагранжа по времени будет иметь вид:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (1)$$

Используя уравнения Лагранжа отсюда получаем:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$$

Следовательно:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = const$$

Величина  $E = \sum_{i=1}^N \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$  (2) остается неизменной при движении системы. Механические системы, энергии которых сохраняются, называются консервативными.

Подставляя в (2) выражение для функции Лагранжа для замкнутой системы, получаем:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + U_B(r_1, \dots, r_N)$$

Отсюда видно, что энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной, зависящей только от координат точек системы.